Жёлтый уровень

1. (6 баллов) Пять учеников выстроились в ряд по росту в порядке его убывания: Коля, Вася, Игорь, Андрей и Егор. Оказалось, что Коля выше Игоря на 3 см, Игорь выше Егора на 4 см, Егор ниже Васи на 5 см, а Вася выше Андрея на 2 см. На сколько сантиметров Коля выше Андрея?

   Решение. Запишем условия задачи в виде уравнений. Получим К=И+3; И=Е+4; Е=В-5; В=А+2. В задаче необходимо найти К-А, преобразуем это выражение, используя равенства, записанные ранее. К-А=И+3-А=Е+4+3-А=В-5+7-А=А+2+2-А=4.

   Ответ. 4 см.

2. (6 баллов) Попугай лжёт по понедельникам, вторникам и средам, а в остальные дни говорит правду. В какие дни он может заявить: «Я лгал вчера и буду лгать завтра»?

   Решение. Нам подойдут дни, когда попугай говорит правду, но за день до этого и на следующий день после этого он лжёт. Из условия очевидно, что таких дней нет. Также подходят дни, когда попугай лжёт, но вчера и/ или завтра будет хотя бы один день, когда он не лжёт. Из условия очевидно, что такими днями являются понедельник и среда.

   Ответ. Понедельник и среда.

3. (7 баллов) Однажды Коля сказал: "Разность между числами прожитых мною месяцев и прожитых (полных) лет сегодня впервые стала равна 111". Сколько ему лет и месяцев?

   Решение. Пусть n – количество полных лет, а m – количество месяцев, $0<m <12$. То есть, возраст Коли в месяцах может быть выражен, как $12*n+m$. Тогда разность количества прожитых месяцев и лет равна $12*n+m-n=11n+m=111$. Нам нужно найти числа, меньшие 111 и кратные 11, чтобы вычислить количество полных лет. Ближайшие такие числа – это 110 и 99, но так как $m <12$, то подходит только 110. Тогда $n=10$, $m=1$. Тогда возраст Коли – 10 лет и 1 месяц.

   Ответ. 10 лет и 1 месяц.

4. (8 баллов) Имеются 2016 карточек с числами 1, 2, 3, …, 2016. Каждое число записано на одной карточке. Какое наибольшее количество карточек можно выбрать, чтобы сумма любых двух выбранных чисел не делилась на 10?

   Решение. Сумма чисел будет делиться на 10, если они оканчиваются на 1 и 9, 2 и 8, 3 и 7, 4 и 6, 5 и 5, 0 и 0. То есть, нам нужно брать из первых четырёх пар чисел числа, оканчивающиеся только на одну из цифр. Чисел, оканчивающихся на 1 и не больших 2016, будет 202 штуки, аналогично для чисел, оканчивающихся на 2, 3, 4 (чисел, оканчивающихся на 7, 8, 9 будет 201 штука, поэтому берём числа, оканчивающиеся на 3, 2, 1, их будет больше). То есть, получаем 202*4=808 чисел. Нужно также выбрать не более одного числа, оканчивающегося на 5 и 0. Всего получим 808+2=810 чисел.

Ответ. 810 чисел.

5. (8 баллов) Найдите наименьшее натуральное число, которое получается выписыванием друг за другом 14 различных натуральных чисел.

   Решение. Очевидно, нам необходимо взять числа от 1 до 14, чтобы наименьшим было количество цифр в получившемся числе. Теперь необходимо расположить эти цифры в таком порядке, чтобы сначала шли числа, в составе которых имеются наименьшие цифры. Это 10, 1, 11, 12, 13, 14. Затем можно располагать остальные цифры в порядке возрастания. Получим число 101111213142356789.

   Ответ. 1011112131423456789.

6. (10 баллов) Дан треугольник ABC, AB = BC = 4, AC = 6, точка E — середина AB. Найдите длины отрезков, на которые делится сторона AC серединным перпендикуляром к отрезку BE?

   Решение. Обозначим середину EB за M, а точку пересечения средней линии со стороной AC за N. По теореме косинусов $BC^2=AB^2+AC^2-2*AB*AC*\cos A$. $16=36+16-2*6*4*\cos A$. $\cos A=3/4$. Тогда из треугольника AMN $\cos A=AM/AN$, то есть, $3/4=3/AN$, отсюда $AN=4$, а $NC=AC-AN=2$.

   Ответ. 4 и 2.

7. (10 баллов) Лёне дали решить ребус АБВ + ВБ + А = 222. Он должен заменить равные цифры заменили одинаковыми буквами, а разные цифры — разными так, чтобы получилось верное равенство. Сколько разных вариантов замен должен найти Лёня?

   Решение. Если А=2, то В+Б должно равняться тоже двум, этого невозможно достичь разными цифрами, поэтому А=1. Тогда В+Б+А=12, то есть, В+Б=11. Это же равенство будет во втором разряде числа, то есть, нужно просто подобрать пары цифр, дающих в сумме 11. Это даёт нам следующие варианты исходного ребуса:

   129+92+1=222; 192+29+1=222; 138+83+1=222; 183+38+1=222;

   147+74+1=222; 174+47+1=222; 156+65+1=222; 165+56+1=222.

   Итого 8 вариантов.

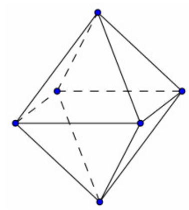
   Ответ. 8 вариантов.

8. (12 баллов) Только Маша задумала натуральное число, так чёрт тут же вычел из него 5. Маша то, что осталось, умножила на 16, а чёрт убрал последнюю цифру результата. Маша итог умножила на 17, а чёрт убрал предпоследнюю цифру результата. У Маши осталось число 51. Какое число она задумала в начале?

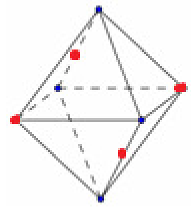
   Решение. Так как на последнем этапе чёрт убрал предпоследнюю цифру числа, то у Маши получилось число 5c1, где c- некая цифра. Это число должно быть кратно 17. Единственная комбинация, когда 7*x даёт 1 в конце получившегося числа – это при x=3. Будем умножать 17 на числа 13, 23, 33. Получим равенство 17*33=561. Значит, чёрт вычеркнул 6, а итог предыдущего шага – число 33. Здесь чёрт убрал последнюю цифру, то есть число выглядело, как 33b, где b – некая цифра. Это число должно быть кратно 16. Поделив столбиком 33b на 16, получим, что b=6, то есть, 16*21=336. Исходное число -5 – это будет 21. То есть, Маша задумала число 26.

Ответ. 26.

9. (15 баллов) Из двенадцати палок длиной 10 м сложили октаэдр. На палках сидят четыре обезьяны, при этом расстояние между любыми двумя (измеряемое кратчайшим путем по ребрам октаэдра) не меньше *R*. При каком наибольшем *R* такое возможно?

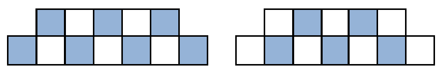


Решение. Очевидно, что обезьян можно рассадить по углам октаэдра так, что расстояние между ними будет равно ребру, то есть, 10м, поэтому будем рассматривать R>10. Посадим обезьяну в один из углов октаэдра. В этом случае, следующая обезьяна не может находится на 4 рёбрах, смежных с этой вершиной. Наибольшим будет расстояние от неё до противоположной вершины в квадратной плоскости, это расстояние составит 20м. В этом случае, мы вычеркнем из рассмотрения ещё 4 ребра, смежных со второй точкой. Останется 4 ребра, на которых мы можем рассадить обезьян только в середине ребра, что даст нам расстояние 15м.



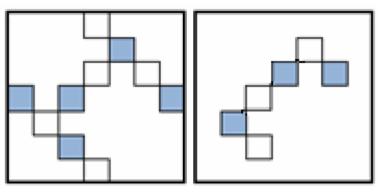
Ответ. 15м.

10. (18 баллов) Незнайка соорудил на столе конструкцию из кубиков двух цветов (кубики либо полностью черные, либо полностью белые) и посмотрел на неё сначала спереди, потом справа. Виды оказались одинаковыми по форме, но противоположными по цвету (как показано на рисунке). Какое наименьшее число кубиков могло пойти на строительство?



вид спереди   вид справа

Решение. В верхнем слое не менее трёх чёрных кубиков (они видны спереди) и не менее трёх белых (видны справа). Значит, на столе не менее 6 башен из по 2 кубика в каждой. Также есть два одиночных чёрных кубика (они видны спереди) и два одиночных белых кубиков (они видны справа). Итого не менее 6 *2 + 4 = 16 кубиков.



первый слой   второй слой

Ответ. 16.